COMO AS CRIANÇAS ENTENDEM A NOÇÃO DE ROTAÇÃO/ ÂNGULO?*

Sandra Magina**

Entre o conhecimento e a aprendizagem

Uma questão antiga dentro da Psicologia Cognitiva gira em torno do papel da aprendizagem e do conhecimento na formação de conceitos. Muitos pesquisadores da Educação Matemática têm adotado o construtivismo como posição teórica, mas mesmo esse guarda-chuva abraça posições que vai desde as mais psicológicas até as mais epistemológicas. A pesquisa descrita aqui foi guiada pelo construtivismo sob uma perspectiva da Psicologia apoiada nas teorias de Piaget e Vygotsky e evidenciada, em particular, pelos trabalhos de Vergnaud e Nunes. A principal proposição do construtivismo diz que a criança constrói sua própria versão da realidade através de suas experiências, onde, nesse processo, ela tem um papel ativo na criação de novas relações entre idéias já existentes e a incorporação de novos pedaços de informação. Isto permitirá o surgimento de novas estruturas. Piaget (1960), talvez o mais conhecido dos construtivistas, advoga que a aprendizagem é resultado de dois processos inter-relacionados, ação e internalização dessa ação, que acontecem durante o desenvolvimento da criança. Vygotsky (1962), também desenvolvimentalista, enfatiza a ação do sujeito no processo de aprendizagem. Ele defende como ponto central de sua teoria que o conhecimento é determinado social e culturalmente. Então, embora similar em alguns aspectos básicos, esses dois autores construíram teorias de caminhos distintos, onde Piaget dá ênfase ao biológico/individual e Vygotsky, ao social/cultural.

Uma outra diferença entre os dois teóricos reside no papel que o ensino tem no desenvolvimento da criança. Para Piaget, o ensino tem um papel limitado na aquisição do conhecimento e desenvolvimento, ao passo que para Vygotsky o ensino é o principal catalisador para a apropriação de conceitos, já que ele estabelece a direção do desenvolvimento mental da criança. Esta posição é evidente na sua noção de "zona de desenvolvimento proximal", a qual contrasta o nível efetive do desenvolvimento da criança —a função psicointelectual que a criança já alcançou — com seu potencial de desenvolvimento (Vygotsky, 1991).

De acordo com o ponto de vista de Piaget (Piaget, Inhelder, Sinclair, 1968; Furth, 1969), o conhecimento envolve mais do que uma simples descrição das coisas, ele está ligado com a operação dessas coisas. O primeiro aspecto do conhecimento — a descrição de coisas que Piaget chama de *conhecimento figurativo* — está presente em qualquer percepção, enquanto que o segundo aspecto do conhecimento — a operação sobre as coisas que Piaget chama de *conhecimento operativo* — diz respeito à transformação dos estados de realidade; ele envolve o pensamento lógico. Furth sumariza o conhecimento operativo da criança como sendo "sua própria atividade no mundo exterior". Da perspectiva da Educação Matemática, Laborde pontua uma crucial diferença entre *desenho* — que está relacionado com aspectos visuais e expressa apenas algumas propriedades do problema a ser resolvido — e *figura* — que embora seja uma representação material, está principalmente relacionado à conceitos teóricos. Numa linguagem piagetiana nós podemos dizer que "desenho" está relacionado ao conhecimento figurativo e "figura" ao operativo.

• O presente trabalho faz parte de um projeto mais amplo, o qual teve como objetivo mapear o caráter multidimensional da concepção de ângulo da criança que envolviam a construção e interpretação de ângulos. Visto que o interesse maior se pautou em questões desenvolvimentais, foi adotada uma abordagem *crois-seccional*, onde 54 crianças divididas em nove grupos de idades, variando entre 6 e 14 anos, responderam às mesmas tarefas. Aqui serão apresentados e discutidos os resultados derivados de apenas um contexto, o relógio analógico, considerando somente sua realização na situação do dia-a-dia.

"" Di Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

Tanto Vergnaud (1984 e 1987) como Nunes têm baseado seus estudos de concepções matemáticas nessas fundamentais teorias. Vergnaud afirma que o conhecimento é o pivô da aprendizagem, argüindo que a aprendizagem depende significantemente do conteúdo a ser ensinado. Ele sugere que a criança deve interagir com o conteúdo dentro de situações-problemas, onde os conceitos relevantes devem ser significantes para ela. Ele ainda advoga que o conhecimento se forma dentro do que ele chama de "campo conceptual" — um consistente elo entre um conjunto de situações que requer uma diversidade de conceitos, ações (invariantes. que podem estar relacionados com a competência ou com a concepção). e o domínio de sua representação simbólica.

Já Nunes (1991) ressalta a importância do que ela chama "situações semânticas" — um rico lugar de aprendizagem (não necessariamente no mundo real), onde é possível as crianças apreciarem o sentido e propósito de suas atividades.

Nosso estudo, parte do qual e relatado aqui, visa a identificar os esquemas de ângulo da criança[1], isto é, os invariantes de suas ações dentro de situações envolvendo ângulo. O estudo foi delineado de tal forma a detectar nas respostas das crianças os significantes através dos quais os invariantes, implícitos e explícitos, são expressos. Sendo assim, tanto as respostas das crianças coito as subseqüentes explicações para as estratégias utilizadas foram consideradas no estudo. Assim sendo, o comportamento das crianças foi considerado não meramente como uma manifestação da cognição individual, mas principalmente como o produto de uma infinidade de facetas compreendendo um indivíduo num mundo socialmente constituído.

[1] O termo "esquema" segue a descrição de Vergnaud (1984 e 1987) que, por sua vez, tem sentido similar ao de Piaget. Esquema refere-se a uma ação organizada que pode ser transferida ou generalizada através de sua repetição em situação análoga. Em outras palavras, um esquema é a formação de um conceito ainda de forma limitada porque ele é usado em apenas um sentido.

A concepção de ângulo das crianças

A maioria das recentes pesquisas sobre as concepções de ângulo das crianças está firmemente arraigada no paradigma das "concepções enganosas". Os estudos têm identificado uma série de respostas "incorretas" das crianças para as questões de ângulo e explicado seus achados através da referência a certos elementos da situação-tarefa (cf. Clese, 1982; APU, 1987). Essas concepções enganosas referem-se à falha no reconhecimento de ângulos retos, agudos e obtusos em outras orientações que não a vertical/horizontal; da confusão entre um ângulo c o tamanho de seus raios; e da dificuldade em identificar os ângulos dentro de uma figura complexa. Em todos esses estudos as questões foram postas no contexto do papel e lápis e pouca ou nenhuma importância foi dada para as interpretações do estudante da situação-tarefa.

Outro contexto no qual se pode explorar problemas envolvendo ângulo é o dia-a-dia. Infelizmente, há poucas pesquisas explorando ângulo nesse contexto, o que implica que pouco se sabe sobre como as noções espontâneas de ângulo das crianças co-existem com o conceito formal advindo da escola. Considerando o que foi exposto acima com a posição de Freudenthal (1973), o qual defende que a Geometria deve ser vista como um ato de apropriação do espaço onde vivemos, respiramos e movemos, é razoável pensar então que o entendimento de ângulo da criança surge, pelo menos em parte, de suas próprias experiências a partir da sua interação com o seu meio ambiente. Há, claro, vários contextos do dia-a-dia onde a criança poderia lidar com a noção de ângulo. Um deles c o do relógio analógico, o qual foi objeto deste estudo.

O estudo

Amostra

O presente estudo foi realizado em Recife, cidade situada no Nordeste do Brasil, onde 54 crianças entre 6 e 14 anos, advindas de uma escola particular para classe média[2], foram divididas, de acordo com suas idades e

[1] O critério para classificar a amostra como classe média baseou-se no valor da mensalidade cobrada pela escola

nível de escolarização, em nove grupos de seis crianças cada. Assim sendo, seis crianças de 6 anos e cursando a alfabetização, formaram o grupo mais novo da amostra, seis crianças de 7 anos, cursando a primeira série, formavam o grupo seguinte, e assim por diante até chegar nas seis crianças de 14 anos que cursavam a oitava série.

Por que relógio?

Diversas foram as razões que nos levaram a explorar a noção de ângulo das crianças através do relógio analógico. A primeira delas foi por causa do sentido semântico que o relógio tem no dia-a-dia das pessoas. De fato, o relógio é uma ferramenta presente e familiar em praticamente toda parte do mundo, o que inevitavelmente tem um potencial para evocar um conjunto de estratégias espontâneas na criança através da sua ação de dar sentido ao tempo. Adicionalmente, apesar do relógio digital ter se tornado o mais popular dentre os modelos de relógios, os analógicos ainda são usados em larga escala, principalmente nas escolas.

Uma segunda razão foi de cunho pragmático, ou seja, nós entendemos que perguntar às crianças "sobre tempo" implica situações mais fáceis de serem modeladas e para tanto nós usamos relógios feitos cm cartolina. Como terceira razão, temos o fato de que a medição de ângulo por rotação faz parte do modo pelo qual o tempo pode ser representado nesse tipo de relógio.

Finalmente, apontamos o fator cultural como mais uma razão. Embora os números na face do relógio sejam obviamente importantes na quantificação das horas para uma pessoa de qualquer nacionalidade, no Brasil o número 6 tem um significado especial. Entre nós, o número 6 está intrinsecamente associado ao valor de meia dúzia e metaforicamente ele é muito usado como "meia", o que torna comuns expressões como "meu telefone é dois, meia, oito, um, meia. três, zero" (para o telefone de número 268 1630). Por tanto, o número 6, por causa do seu sentido cultural, pode ser um elemento a mais de informação neste estudo.

Vale a pena salientar que com relação à influência do ensino, sabemos que não é de responsabilidade da escola ensinar seu alunos sobre relógios (como um relógio funciona e como ele nos informa as horas), embora saibamos que algumas escolas o fazem. No caso da escola deste estudo isso não ocorria, o que nos permite assumir que praticamente tudo que as crianças sabiam sobre relógio derivava de suas próprias experiências fora da escola. Através de atividades utilizando relógios de vários tamanhos feitos, seja em cartolina, nós sentimos que teríamos um rico contexto para explorar uma série de questões no que tange à noção de ângulo. Questões do tipo: "como as crianças 'medem' o tempo no relógio: através dos números ou por medidas espaciais"? "Suas estratégias são afetadas pelas características físicas do relógio: sua forma, seu tamanho, a presença ou ausência de números em sua face"? "As diferentes representações do relógio (mudança no significante ou no meio no qual ele foi desenhado) influenciam as respostas das crianças"? E. finalmente, "é possível identificar progressos entre os grupos de crianças e, se sim, quais são as mudanças reveladas — como, digamos, crianças de 6 anos diferem, no modo de construir e comparar ângulos, das de 13 anos? está esse progresso associado à instrução escolar"?

Descrição das atividades na situação do dia-a-dia (relógios de cartolina)

Nessa situação foram usados nove relógios divididos em três grupos, a saber: três relógios grandes de formato circular cuja cartolina era de cor azul, três pequenos também de formato circular feitos em cartolina de cor vermelha, e três de cor preta e formato oval. dois dos relógios de cada conjunto não tinham números e um tinha. As cores diferentes de cada grupo de relógios ajudavam na distinção das respostas das crianças. As atividades foram desenvolvidas seguindo a orientação horária.

a) Atividades de Predição

As cinco primeiras atividades pediam para a criança predizer a posição do ponteiro dos minutos meia volta/meia hora depois do tempo mostrado na face do relógio. Em cada caso era pedido para que a criança movesse o ponteiro dos minutos para o lugar que ela achasse correto e depois para que ela justificasse sua predição. Nas três primeiras atividades (Figura 1) pediam que a criança girasse o ponteiro *meia volta*, enquanto nas duas últimas *meia hora* (Figura 2). O tempo inicial, o formato, o tamanho e a presença e ausência de números na face do relógio variavam de atividade para atividade, como se pode ver nas figuras abaixo:

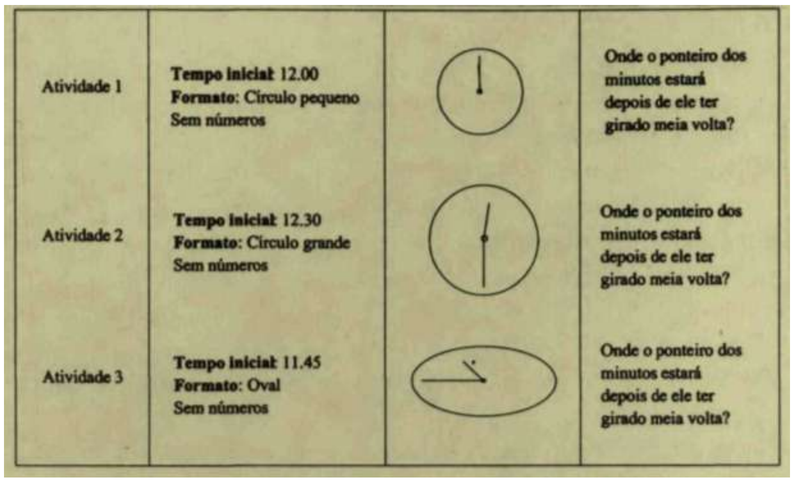

Figura 1: Atividades envolvendo predição de meia vota

Por causa da ausência de números nos relógios e porque as questões diziam respeito aos giros do ponteiro ao invés de sua hora, essas três atividades requeriam um baixo nível de competência; as crianças não precisavam ter qualquer conhecimento da métrica do relógio nem de saber sobre ângulo; tudo o que precisavam saber para resolver essas atividades era o que significava *meia volta* e estarem aptos a fazer uma rotação nos relógios. Portanto, nós consideramos as atividades 1, 2 e 3 mais fáceis que as seguintes.

— Atividades 4 e 5: três relógios, circular grande e pequeno e oval, todos com números mostrando 12h (atividade 4) e 12: lOh (atividade 5), foram apresentados simultaneamente à criança.

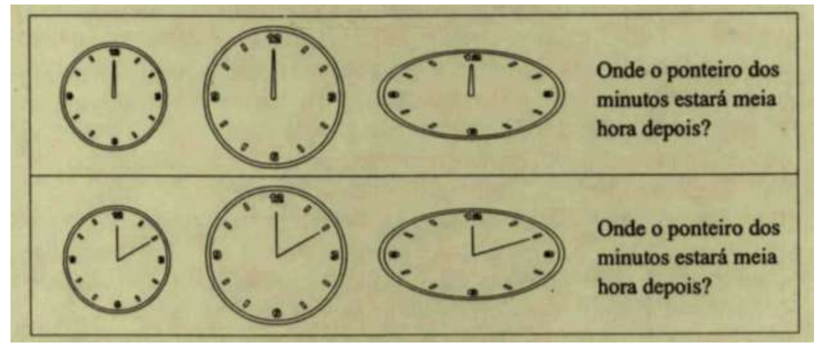

Figura 2: Atividades envolvendo predição de meia hora

Nós consideramos que a introdução de números nos relógios significa uma nova variável para as crianças. Além do mais, o fato de termos introduzido simultaneamente três formatos de relógios indicando a mesma hora, pode causar alguma confusão se elas tomarem o formato como um invariante. Por outro lado, se elas souberem usar a métrica do relógio, elas não terão nenhum problema para resolverem as atividades, mesmo tendo sido introduzidas essas variáveis. Outro ponto a ser considerado aqui é que o número 6 como significando "meia" pode trazer também alguma dificuldade. Se sim, elas resolverão a atividade 4. mas não a 5.

b) Atividades de Comparação

As três atividades que envolveram a comparação de tempo entre relógios, apresentaram relógios ora com ponteiros começando em posições diferentes, ora relógios de tamanhos e formatos diferentes. Tendo em vista que nossa intenção era "brincar de relógio" ao invés de ter situações precisas de horas, nós não giramos o ponteiro das horas em perfeita sintonia com o dos minutos. Nesse sentido, nós estávamos realmente trabalhando com uma situação semântica para o relógio.

— Atividade 6: foram usados seis relógios (dois de cada formato), todos sem números e indicando 12h, os quais foram mostrados simultaneamente à criança. Foi dito à criança que cada um daqueles relógios tinha sido entregue a um aluno para marcar o tempo que ele gastava fazendo sua tarefa de casa. Era a pesquisadora quem girava os ponteiros de cada relógio até que este chegasse na hora em que a tarefa de casa de cada suposto aluno tivesse terminado. Eram perguntadas à criança duas questões:

1) Que aluno gastou mais tempo na tarefa (aponte para o relógio do aluno);

2) Que aluno gastou menos tempo na tarefa (aponte para o relógio do aluno).

Sempre que requerida, a pesquisadora repetia a ação de "rotacionar" os ponteiros dos relógios. A posição final dos seis relógios estão apresentadas na Figura 3.

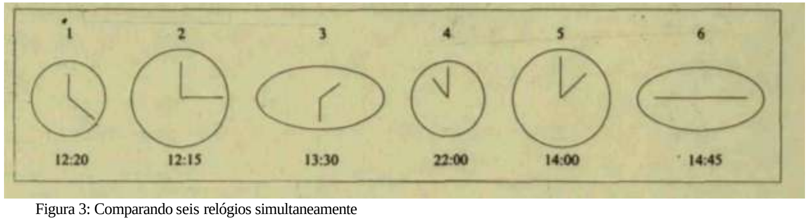

Figura 3: Comparando seis relógios simultaneamente

Através da atividade 6 nós poderemos observar se a rotação é algo considerado pela criança, ou se outras variáveis irrelevantes, tais como formato dos relógios e distância entre seus ponteiros na posição final, influenciam mais fortemente as suas respostas.

— Atividades 7 e 8: as comparações aqui pedidas eram entre relógios que girariam meia hora, porém teriam posições iniciais, e conseqüentemente finais, diferentes um do outro. A pesquisadora usou a mesma estória da tarefa de casa da atividade anterior, com a diferença que a pergunta agora era se os alunos tinham gasto ou não o mesmo tempo para resolverem suas tarefas de casa e como era possível saber. Na atividade 7 os relógios envolvidos eram um circular pequeno e um oval, enquanto na atividade 8 foram usados um relógio circular pequeno e um circular grande. Todos eles com números, como mostra a Figura 4.

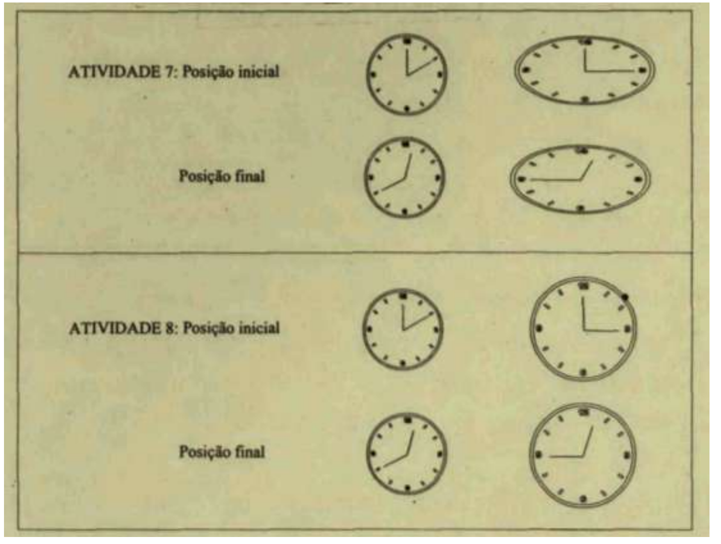

Figura 4: Comparação de 1/2 hora entre dois relógios que mostram horas **diferentes**

A nova variável introduzida nessas duas últimas atividades foi a diferença na hora que um relógio apresentava com relação ao outro, tanto nas suas posições iniciais como finais. Para obter sucesso aqui a criança deve ter consciência de que o lugar onde o ponteiro dos minutos estará meia hora depois depende de sua posição inicial. Se a criança levar em consideração apenas a posição final, ela responderá que o relógio oval (para a atividade 7) e o circular pequeno (para a atividade 8) trabalharam mais.

Resultados das atividades de predição

Predição de meia volta: os resultados obtidos para as atividades 1, 2 **e** 3 mostram que as crianças, exceto as de 6, 7 e talvez 8 anos, não apresentaram dificuldades para resolver estas atividades. Isso significa que acima de 8 anos as crianças sabiam fazer meia volta, isto é. estavam aptas a fazer uma rotação corretamente.

Predição de meia hora: o primeiro resultado importante a relatar é que as crianças deram a mesma resposta para os três formatos de relógios, seja na atividade 4 ou na 5, isto é, eles acertaram ou erraram consistentemente, mas as respostas podiam diferir da atividade 4 para a 5.

A Tabela 1 mostra os números de respostas incorretas, em cada idade, para as cinco primeiras atividades.

Tabela 1

Número de respostas incorretas para predição de meia volta e meia hora

		Meia volta			Meia hora	
		Ativ. 1	Ativ. 2	Ativ. 3	Ativ. 4	Ativ. 5
	Idadade	Tempo início 12:00	Tempo início 12:30	Tempo início 11:45	Tempo início 12:00	Tempo início 12:10
Ensino Fundam.	6	6	4	6	3	6
	7	5	5	4	3	6
	8	0	0	2	0	3
	9	1	1	1	0	4
	1O	1	0	0	0	2
Ensino Médio	11	0	0	0	1	3
	12	0	0	0	0	1
	13	O	0	0	0	1
	14	0	0	0	0	0
TOTAL		13	10	13	7	26
% incor.		24.1	18.5	24.1	13	48.1

Discussão

Idade: a análise dos dados através da idade mostra uma forte tendência à melhoria de *performance* com avanço da idade; crianças de 6-7 anos tiveram uma considerável dificuldade com todas as tarefas, crianças entre 12 **e** 14 anos praticamente não cometeram erros e crianças entre 8 **e** 11 anos se saíram muito bem em algumas atividades e em outras não. Esses achados apontam para um efeito desenvolvimental, mas a influência do ensino de ângulo, principalmente para o ensino médio, deve ser levado também em consideração.

Estratégia: nas atividades de 1 a 3 os números não estavam presentes nas faces dos relógios, o que "forçava" as crianças a usarem rotação como única métrica disponível. Adicionalmente, foi pedido especificamente a elas para girarem o ponteiro dos minutos por meia volta . As crianças acima de 10 anos tiveram uma performance praticamente perfeita, enquanto as crianças de 6 e 7 anos apresentaram bastante dificuldades. As crianças entre 8 e 10 anos variaram em suas performances.

Na atividade 4 houve poucos erros de um modo geral. As crianças mais novas cometeram a maioria dos erros, o que confirma nossa hipótese do efeito desenvolvimental, porém o número de erros tanto das crianças mais novas (6 e 7 anos) como das crianças de idades intermediárias (entre 8 e 10 anos) foi consideravelmente reduzido. Já na atividade 5, houve um considerável aumento nos erros não apenas por parte das crianças mais novas como também no grupo de idades intermediárias e mesmo no grupo das mais velhas. A partir das respostas das crianças nas atividades 4 e 5, nós podemos distinguir quatro tipos de estratégias:

Sem estratégia: quando a criança dá explicações irrelevantes. Isso foi encontrado em cinco das seis respostas do grupo de 6 anos e em três do grupo de 7 anos. Exemplos desse tipo de respostas são:

> ***É aqui porque o ponteiro quer*** **(6 anos);**
>
> ***Eu ainda não aprendi horas*** **(6 anos);**
>
> ***Depois de meia hora o ponteiro tem que ficar noutro lugar, qualquer lugar*** **(7 anos).**

Representação fixa: quando a criança associa o lugar de meia hora com o lugar do número 6 no relógio. A estratégia da representação fixa ocorre quando a criança usa o aspecto do conhecimento figurativo, onde a posição do número 6 aparece como um rótulo para meia hora. Nesse caso, a criança pode ter sucesso na atividade 4, mas não na 5. Esse tipo de estratégia foi encontrada em crianças desde 6 anos até 13 anos. Três exemplos desse tipo de estratégia são dados a seguir:

> ***Eu tenho que parar no número 6 porque meia hora é meia e*** *meia é 6* (7 anos);
>
> ***Meia é no número*** **6(11 anos);**
>
> ***O número 6 significa meia e você me perguntou por meia hora*** (13 anos).

Erro de contagem: quando a criança começa a associar a idéia de meia hora com pular um certo número de espaços na face do relógio. Contudo, ela não tem certeza como fazer isso. A criança aqui se encontra num nivel de transição entre o conhecimento figurativo e operativo. Em termo de competência das crianças, nós podemos distinguir dois subníveis. No subnível mais baixo a criança parece misturar a estratégia da representação fixa com a estratégia de contagem, isto é, na atividade 4 ela associa meia hora com a posição do número 6 e na atividade 5, baseado na atividade anterior, ela conta do 12 até o número 6 (considerando inclusive o 12) e então pula 7 números, como mostra o exemplo abaixo:

> ***Na última tarefa eu pulei 7 números para parar no meia e agora eu fiz a mesma coisa... contei 7 números*** **(10 anos).**
>
> ***Eu contei e fui pulando ... contei 7*** **(9 anos).**

No segundo subnível as crianças tentam evitar o rótulo do número 6, elas agora passam a usar apenas a idéia de pular. No entanto, elas apresentam dúvidas se o número inicial entra na contagem ou quantos números devem ser pulados. Os exemplos abaixo ilustram essas duas dúvidas:

> ***Eu contei seis números e então coloquei o ponteiro no sexto*** (contando o número onde o ponteiro se encontrava inicialmente como o primeiro número).
>
> ***Para ser meia hora tem que mover o ponteiro três números.***

Estratégia coordenada: quando a criança consegue coordenar meia hora com o ato de pular seis números, porque quando o ponteiro passa por seis números significa que se passaram 30 minutos. Para essas crianças, meia hora é o mesmo que meia volta, na situação do relógio e para tanto é preciso levar em consideração a posição inicial do ponteiro. Essas crianças demonstram um claro entendimento de rotação em consonância com a métrica do relógio, elas estão usando o conhecimento operativo. Todas as crianças de 14 anos e mais a maioria das de 13 e 12 anos explicaram suas predições usando esse tipo de estratégia, como mostram **os** exemplos abaixo:

> *Uma hora é 60 minutos, metade é 30. Se eu contar seis números eu chego na metade porque no relógio tem 12 números que formam 1 hora e a metade é 6* (14 anos);
>
> *Meia hora é o mesmo que meia volta, o ponteiro tem que parar no meio da volta toda, mas depende de onde ele começou a rodar* (13 anos).

Resultados das atividades de comparação

Tabela 2

Número de respostas incorretas nas atividades de comparação

		Ativ. 6		Ativ. 7			Ativ. B		
		Gastou + tempo	Gastou • tempo	Tradalhou mais		Total incor.	Trabalhou mais		Total incor.
	Idade	Respost. incorret. segundo a idade		Circular pequena com. 13:10	Oval com. 13:15		Circ. grande com. 13:10	Circ. peq. com. 13:15	
Ensino Fundam.	6	5	5	0	S	5	2	3	5
	7	4	3	1	5	6	1	5	6
	8	4	3	1	4	5	1	3	4
	9	4	3	0	5	5	0	5	5
	10	3	3	0	5	5	0	3	3
Ensino Médio	11	3	1	0	3	3	0	2	2
	12	2	1	0	1	1	0	1	1
	13	1	1	0	0	0	0	0	0
	14	0	0	0	0	0	0	0	0
TOTAL		26	24	2	28	30	4	22	26
% incor.		48.1	44.4			55.5			48.1

O primeiro resultado a discutir é que as crianças fizeram menos erros na atividade 6 (comparação simultânea de seis relógios) que na 7, onde só dois relógios estavam envolvidos. Isto foi particularmente notado entre as crianças de até 10 anos. A primeira vista, esse resultado pode parecer estranho e alguém poderia pensar que comparar seis relógios terminando em tempos diferentes seria uma tarefa bem mais difícil que comparar apenas dois. Contudo se olharmos mais cuidadosamente para as duas tarefas em questão, podemos notar duas grandes diferenças entre elas. as quais nos levarão a um pensamento oposto. A primeira delas diz respeito à diferença na posição inicial dos ponteiros nas tarefas, ou seja, enquanto na atividade 6 todos os relógios começam na mesma posição, eles ainda começam em cima do número 12 (uma posição simétrica), na atividade 7 os ponteiros começam em posições distintas e não simétricas. A segunda diferença é que na atividade 6 nenhum dos seis relógios tinha números em suas faces, o que permitia à criança pensar (se quisesse) só em termos de rotação, ignorando a métrica do relógio. Além disso, na atividade 6 cada relógio moveu diferente quantidade de tempo, e seus ponteiros pararam em lugares diferentes, o que coincide com um raciocínio intuitivo, isto é, você tem diferentes posições finais se você trabalhou diferentes quantidades de tempo. Já na atividade 7, os dois relógios terminaram em posições diferentes, mas trabalharam a mesma quantidade de tempo.

Nós sugerimos então que a diferença na performance entre as atividades 6 **e** 7 origina-se da posição inicial do relógio, particularmente quando esta não é 12h. Quais as implicações desta interpretação? Ela inevitavelmente nos leva a conjecturar que as crianças não estavam pensando em termos de rotação ou medição dinâmica de meia volta — mesmo que isto tenha sido mostrado a eles através das inúmeras vezes que os ponteiros foram "rotacionados" pela pesquisadora — ao contrário, elas estavam focando outros aspectos da situação, tais como, apenas a posição inicial, apenas a posição final ou, ainda, a relação espacial dos ponteiros.

Para explorar nossa hipótese mais profundamente, vamos analisar primeiramente a atividade 6. Primeiro, a despeito da melhoria com a idade, ainda tivemos que 13 das 50 respostas incorretas vieram das crianças que cursavam o estudo médio, onde é esperado que nessa faixa de idade as crianças já teimam total familiaridade e dominio com a métrica do relógio. Das 26 respostas incorretas referentes à parte da atividade que perguntava qual dos relógios tinha andado mais, 23 responderam que foi o oval (mostrando 14:45). Para essas crianças, nós sugerimos, o que foi levado em consideração foi a posição final dos relógios, e em particular quão longe um ponteiro estava do outro, como ilustrado pela explicação de um garoto de 9 anos que, tendo escolhido o relógio oval como aquele que tinha trabalhado mais, justificou da seguinte maneira: "eu sei por causa dos ponteiros, eles estão muito longe um do outro. Veja esse ponteiro aqui (apontando para o ponteiro dos minutos) está do outro lado". Da mesma forma uma criança de 12 anos escolheu o oval argumentando que "é por causa da diferenças entre os ponteiros". Então nos parece que, junto com a posição final dos ponteiros, o formato dos relógios também contribuiu para essa escolha. Essas crianças estavam usando a métrica do espaço e ignorando a métrica do movimento. Vale salientar que apenas 5 crianças da escola média cometeram erros, o que provavelmente nos aponta para um efeito de idade e/ou ensino escolar.

Olhando agora a atividade 7, nós vimos que das 30 respostas erradas 28 responderam que o relógio oval tinha trabalhado mais. Examinando as explicações das crianças para essa escolha, nós sugerimos três possíveis interpretações: primeiro, algumas crianças simplesmente olharam para a posição final dos ponteiros nos relógios, vendo que no oval o ponteiro dos minutos terminou em cima do número 9 e no circular pequeno num número antes. Essas crianças assumiram implicitamente que o ponto inicial dos relógios era o mesmo. A resposta de uma garota de 10 anos exemplifica bem essa interpretação: "este (relógio oval) está mostrando 45 minutos e esse (relógio circular pequeno) andou 40 minutos".

Segundo, algumas crianças foram influenciadas pelos formatos do relógios, como ilustra a resposta de um garoto de 8 anos que escolheu o oval: "esse (ponteiro dos minutos do relógio oval) parou mais longe do outro ponteiro (ponteiro das horas do mesmo relógio) que esse (ponteiro dos minutos do relógio circular pequeno) desse ponteiro aqui (ponteiro das horas do circular pequeno)".

A terceira interpretação é que algumas crianças tenham considerado em suas respostas os ângulos formados pelos ponteiros depois do giro de meia hora (a pesquisadora girou apenas o ponteiro dos minutos). Um exemplo disso foi encontrado na resposta de uma garotinha de 6 anos, que justificou que o relógio oval andou mais porque "ele terminou muito aberto". Todas essas respostas indicaram falhas para reconhecer a irrelevância dos formatos ou dos tamanhos dos ponteiros em questão, ou ainda falha em não considerar o ponto final em relação ao inicial. Parece claro que essas crianças não estavam considerando o movimento feito de um ponto a outro ponto. Em outras palavras, essas crianças resolveram as atividades através do conhecimento figurativo.

Um perfil similar foi encontrado na atividade 8, onde 22 das 26 respostas incorretas disseram que o relógio circular pequeno trabalhou mais que o grande. Novamente podemos discutir que esse tipo de resposta foi influenciado pelas posições finais dos relógios, como ilustra a resposta de uma garota de 8 anos que explica: "aqui é 9 e 9 é mais que 8, vem depois", ou a resposta de um menino de 10 anos: "aqui (circular pequeno) é 45 minutos e aqui (circular grande) é 40, então o que foi 45 andou mais".

É importante salientar que o tamanho e/ou formatos dos relógios, que não foram relevantes para essas crianças nas cinco primeiras atividades, passou a ser nas três últimas.

Conclusão

A primeira conclusão está relacionada com o fator de desenvolvimento. De fato, embora não possamos desconsiderar o efeito do ensinamento escolar sobre a *performance* dessas crianças, nós percebemos que é possível dividir as crianças em três subgrupos: grupo 1, composto por crianças de 6 e 7 anos, que mostrou grande dificuldade para resolver todas as atividades. Este grupo apresentou uma performance um pouquinho melhor nas atividades de predição que no reconhecimento de giros. O grupo 2. formado por crianças entre 8 e 11 anos. apresentou claras dificuldades nas atividades de comparação, enquanto que nas de predição se saiu muito melhor. Finalmente, o grupo 3, que incluía as crianças entre 12 e 14 anos, foi aquele onde as crianças se saíram bem tanto nas tarefas de comparação como nas de predição. Diferentemente dos dois grupos anteriores, onde crianças de diferentes idades mostraram performances similares, no grupo 3 os resultados das crianças de 12 anos foram claramente inferior aos de 13 e 14 anos, mas, por outro lado, seus resultados foram duas vezes superior aos das crianças do grupo 2.

Em resumo, podemos dizer que a principal variável do grupo 1 foi o não conhecimento da métrica do relógio; no grupo 2 a variável mais importante foi a condição das atividades, isto é, comparar horas foi mais difícil que predizê-las. Dois fatores devem ser levados em consideração aqui, primeiro que é por volta dessas idades que as crianças estão aprendendo a reconhecer horas no relógio, isto é, elas estão formando os invariantes desse conceito. O segundo fator é que a Geometria ensinada para alunos até a quarta série se centra basicamente no estudo das formas das figuras. Com esses dois fatores em mente, podemos interpretar que as crianças do grupo 2 são, em geral, competentes para predizer giros em termos de rotação, contudo, em relação à hora, essas crianças são fortemente influenciadas por algumas variáveis irrelevantes, tais como formato, distância final entre os ponteiros ou representação fixa. Por fim, pareceu-nos que nenhuma dessas variáveis foram suficientes para influenciar as performances das crianças do grupo 3, exceção, talvez, para as crianças de 12 anos.

Com relação ao sistema de sinais, notamos que o número 6 representou não apenas um número — um referente — mas também o lugar da meia hora — conhecimento figurativo, relacionado com a memória das crianças — ou ainda a quantidade de números a ser pulados a fim de se chegar a meia hora — transição entre os conhecimentos figurativo e operativo — para, finalmente, ser internalizado como um invariante de concepção. O modo pelo qual as crianças dos diferentes grupos trabalharam com o número 6 nos mostrou a importância da representação interna para a formação simbólica do conceito. Assim sendo, foi possível detectar três estágios nessa formação: no primeiro, o número 6 está associado a meia hora. mas como sendo um lugar fixo, ou seja. meia hora tem seu lugar fixo no relógio. No segundo estágio, as crianças percebem que o número 6 está relacionado com meia hora e isso significa pular seis números, contudo não está ainda claro se a posição onde o ponteiro se encontra deve ou não ser contada. Por fim, num terceiro estágio, as crianças fazem relação entre o número 6 ou meia volta, que na situação do relógio significa meia hora e que isso implica pular seis números a partir do número seguinte ao que o ponteiro se encontra em sua posição inicial. Aqui o referente não é mais o número 6. mas seis números; o significante para 6 continua sendo "meia", mas no sentido de metade, de meio; e o significado dessa quantidade deixa de ser uma visão estática e assume uma perspectiva dinâmica, onde a rotação do ponteiro se torna o principal foco.

Com relação à influência da escolarização, acreditamos que certamente ela existe, uma vez que é quase impossível a criança aprender a métrica do relógio sem saber a tabuada de 5. Contudo, esse fato parece está mixigenado tanto com o fator de desenvolvimento quanto com a questão cultural', advinda da própria experiência da criança dentro do seu meio ambiente.

[1] Estamos considerando como um fator cultural, por exemplo, o significado do número ó para a sociedade brasileira: se nós estávamos perguntando a criança sobre 'meia' (seja meia volta ou meia hora) e 6 significa meia em nossa sociedade, então 6 passa a ser um importante invariante a ser apropriado por essas crianças na direção de sua formação de conceitos.

Referências bibliográficas

APU. *Primary andsecondary Survey:* report n. 1. London: HMSO, 1987.

CARRAHER, T.N., CARRAHER, D.W.. SCHLIEMANN, AD. Mathematics in the streets and in schools. *British Journal of Developmental Psychology*, v.3, p.22-29, 1985.

CLOSE, G.S. *Children s understanding of angle at the primary/ secondary transfer stage.* London: Polythccnic of South Bank, 1982.

FREUDENTHAL, H. *Mathematics as an educational task.* Dordrccht: D. Reidel, 1973.

FURTH, G. *Piaget and knowledge:* theorclical foundations. London: Prcntice-Hall. 1969.

HIELE. PM. van. *Structure and insight:* a theory of mathematics education. London: Académie Press. 1986.

NUNES, T. *Cognitive invariants and cultural variation in mathematical concepts.* London: Institute of Education, 1991.

PIAGET, J., INHELDER, B.. SZEMINSKA. A. *The childs conception ofGeometry.* London: Routledge and Kegan Paul, 1960.

PIAGET, J.. INHELDER. B„ SINCLAIR. H. *Mémoire et Intelligence. Paris:* Universitaire de France Press. 1968.

VERGN AUD. G. *Didactics as a content-oriented approach to research on the learning ofPhvsics, Mathematics and natural language.* New Orleans: AERA. 1984.

________. Conclusion. In: JAVIER. C. (Ed.). *Problem of the representation in the teaching and learning of Mathematics.* London: LEA, 1987.

VYGOTSKY. L.S. *Thought and language.* Cambridge: MIT Press, 1962.

VYGOTSKY. L.S.. LURIA. AR., LEONTIEV, A.N. *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem.* SãoPaulo: Ícone, 1991.